JUPIKA: Jurnal Pendidikan Matematika Universitas Flores
P - ISSN: 2745 – 5483
Volume 8, Nomor. 1, Hal. 54-63 Maret 2025
E - ISSN: 2745 – 5491

ESENSI DAN PROSES PEMBUKTIAN EKUIVALENSI LOGIS MENGGUNAKAN SIMBOL LINGKARAN PUTIH DAN LINGKARAN HITAM

Junius Karel Tampubolon*, Raden Gunawan Santosa

Program Studi Informatika, Universitas Kristen Duta Wacana, Yogyakarta, Indonesia
Email penulis koresponden: karel@staff.ukdw.ac.id

Abstract

The essence of the equivalence of P and Q is a condition that shows that P and Q have the same meaning based on the established reference. Achieving equivalence between P and Q involves transforming the form of P into Q while consistently obeying the established reference. The process of transforming P into Q using the symbols ○ (white circle) and ● (black circle) while maintaining their equivalence is known as the equivalence step. The essence of logical equivalence steps are simplification, substitution and construction. The purpose of this study is to explore the process of the equivalence step more deeply to simplify the expression of propositions and ensure that the meaning of the symbols remains consistent and does not change the meaning of its original context after the equivalence step is carried out. The method used in this study has four stages, namely the preparation of equivalence guidelines, the development of problem-solving questions, simulation experiments, and the last is error evaluation. This study concludes that errors in the equivalence step often occur due to misunderstandings in the use of logical relationships such as "and," "or," and "if-then." Furthermore, incorrect equivalence steps can also occur due to inconsistent steps, steps that do not follow the rules of precedent, and steps that result in contradictions.

Keywords: *Contradictions; Equivalence Steps; Inconsistent Steps.*

Abstrak

Esensi ekuivalensi antara P dan Q adalah suatu kondisi yang menunjukkan bahwa P dan Q memiliki makna yang sama berdasarkan referensi yang telah ditentukan. Perolehan ekuivalensi antara P dan Q adalah dapat dengan cara melakukan perubahan bentuk P menjadi Q dengan konsisten mematuhi referensi yang telah ditentukan. Proses perubahan bentuk P menjadi Q dengan menggunakan simbol ○ (lingkaran putih) dan ● (lingkaran hitam) dengan tetap mempertahankan ekuivalensi disebut sebagai langkah ekuivalen. Esensi dari langkah ekuivalen adalah penyederhanaan, substitusi, dan konstruksi. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengeksplorasi lebih dalam proses langkah ekuivalen guna menyederhanakan ekspresi proposisi serta memastikan bahwa makna simbol tetap konsisten dan tidak mengubah makna dari konteks aslinya setelah langkah ekuivalen dilakukan. Metode yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari empat tahap, yaitu penyusunan pedoman langkah ekuivalen, pengembangan soal pemecahan masalah, eksperimen simulasi, dan terakhir adalah evaluasi kesalahan. Kesimpulan dari penelitian ini adalah bahwa kesalahan dalam langkah ekuivalen sering terjadi akibat kesalahpahaman dalam penggunaan hubungan logis seperti "dan," "atau," dan "jika-maka." Selain itu, langkah ekuivalen yang salah juga dapat terjadi akibat langkah yang tidak konsisten, langkah yang tidak mengikuti aturan preseden, serta langkah yang menghasilkan kontradiksi.

Kata kunci: Kontradiksi; Langkah Ekuivalen; Langkah Tidak Konsisten.

PENDAHULUAN

Berlogika adalah aktivitas berpikir yang melibatkan perpindahan dari satu pernyataan ke pernyataan lain dengan konsistensi, tanpa menimbulkan kontradiksi (Tampubolon, 2020). Dalam proses ini, terdapat dua langkah utama, yaitu langkah menarik kesimpulan dan langkah ekuivalen (Grassmann, 1996). Langkah menarik kesimpulan berkaitan dengan proses penalaran yang mengarah pada suatu keputusan berdasarkan premis yang diberikan. Secara umum, terdapat tiga metode utama dalam penarikan kesimpulan, yaitu modus ponens, modus tollens, dan silogisme. Sementara itu, langkah ekuivalen berfokus pada transformasi simbol-simbol menjadi bentuk lain yang lebih sederhana, namun tetap mempertahankan makna aslinya. Dalam hal ini, simbol (logika simbolik) menjadi alat penting dalam merepresentasikan dan menganalisis proses berpikir logis (Prihandoko, 2006).

Dalam kajian logika simbolik, konsep ekuivalensi logis memiliki peran penting, terutama dalam menyederhanakan ekspresi logis tanpa mengubah maknanya (Gereda, 2022). Salah satu penerapan nyata logika simbolik dalam dunia pendidikan adalah pelatihan simbolik-matematik yang telah dilakukan di SMA Bopkri 2 Yogyakarta (Santosa & Tampubolon, 2020). Penerapan ini menunjukkan bagaimana logika simbolik dapat membantu mempermudah pemahaman konsep-konsep logis dalam matematika melalui penggunaan simbol yang lebih terstruktur (Gultom, et al., 2025). Salah satu topik utama dalam logika simbolik adalah proposisi, yaitu pernyataan yang memiliki nilai kebenaran. Berbagai penelitian telah membahas proposisi dari berbagai sudut pandang. Misalnya, metode pohon semantik telah digunakan untuk menganalisis hubungan antarproposisi (Nursyahida, 2022), dan berbagai aturan rules of inference telah diterapkan dalam pembuktian logika proposisional (Rosadi & Praswidhianingsih, 2009). Selain itu, logika Boolean juga telah diterapkan dalam berbagai sistem berbasis teknologi, seperti program permintaan barang berbasis web (Prayogo & Fauzi, 2015). Namun, penelitian-penelitian tersebut lebih berfokus pada analisis inferensi dan penerapan logika dalam sistem teknologi, tanpa membahas pembuktian ekuivalensi logis melalui langkah ekuivalen.

Pemahaman terhadap ekuivalensi logis sangat penting dalam pendidikan matematika, terutama dalam meningkatkan literasi dan numerasi siswa. Penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa keberhasilan strategi guru dalam meningkatkan pemahaman logika dan matematika sangat dipengaruhi oleh metode dan pendekatan yang digunakan dalam pembelajaran (Nato, Taga, Suryani, & We'u, 2024). Namun, di sisi lain, berbagai tantangan juga dihadapi oleh para pendidik, terutama dalam mengajarkan konsep ekuivalensi logis kepada siswa (Woe, Suryani, & Mei, 2024). Oleh karena itu, memperdalam pemahaman tentang langkah ekuivalen dalam logika simbolik tidak hanya berkontribusi dalam penyederhanaan ekspresi logika, tetapi juga membantu meningkatkan efektivitas pembelajaran matematika serta memperkaya pemahaman siswa terhadap konsep-konsep logis yang lebih kompleks.

Fokus utama dalam tulisan ini adalah langkah ekuivalen, yang memiliki peran penting dalam berbagai aspek pemecahan masalah dan analisis logika (Suciati, 2024). Langkah-langkah ekuivalensi memastikan validitas setiap transformasi atau manipulasi yang dilakukan, sehingga solusi yang diperoleh tetap setara secara logis. Selain itu, penerapan langkah ekuivalen juga membantu menghindari kesalahan dalam perhitungan, seperti perubahan nilai atau makna dari suatu persamaan atau pernyataan yang dapat mengarah pada hasil yang keliru.

Selain menjaga validitas dan mengurangi kesalahan, langkah ekuivalensi juga berfungsi untuk menyederhanakan masalah. Persamaan atau logika yang kompleks dapat diubah ke dalam bentuk yang lebih sederhana, sehingga lebih mudah dipahami dan diselesaikan. Hal ini juga berkaitan erat dengan konsistensi logika, di mana langkah ekuivalen memastikan hubungan antar pernyataan tetap terjaga, sehingga argumen yang diajukan tetap valid dalam proses pembuktian atau analisis (Apriyani, 20210. Lebih lanjut, langkah ekuivalen juga berperan dalam memperkuat pemahaman konsep. Melalui penerapannya, seseorang dapat memahami bagaimana hubungan antara berbagai elemen dalam suatu persamaan atau pernyataan terbentuk dan mengalami perubahan. Keunggulan lainnya adalah bahwa langkah ekuivalen mengikuti aturan dan prinsip yang diterima secara universal, sehingga solusi atau argumen yang dihasilkan dapat diakui secara luas dalam berbagai disiplin ilmu. Selain manfaat tersebut, langkah ekuivalen juga meningkatkan efisiensi dalam penyelesaian masalah. Dengan menyusun transformasi secara sistematis, proses pemecahan masalah dapat dilakukan dengan lebih cepat dan lebih efisien tanpa kehilangan ketepatan. Sebagai contoh dalam matematika, jika seseorang ingin menyelesaikan persamaan $2x+3=7$, langkah ekuivalen memastikan bahwa setiap transformasi, seperti mengurangi 3 dari kedua sisi atau membagi kedua sisi dengan 2, tetap menjaga kebenaran persamaan. Tanpa penerapan langkah ekuivalen ini, solusi yang diperoleh mungkin tidak valid, sehingga menunjukkan betapa pentingnya prinsip ini dalam berbagai konteks analisis dan perhitungan.

Pada tahun 1854, George Boole menyusun buku berjudul "The Laws of Thought" yang berisi aturan-aturan operasi untuk bilangan biner (Rosen, 2012). Aturan-aturan ini menjadi dasar bagi Aljabar Boole, yang juga hanya menggunakan dua nilai, yaitu 1 dan 0. Dalam konteks logika dua nilai, simbolisasi dapat bervariasi, misalnya menggunakan B-S, ∆-∇, atau "△"-"⊟" (Ben-Ari, 2012). Ide dasar dari tulisan ini adalah mengganti simbol T (True) dan F (False) yang sudah sering digunakan menjadi simbol yang lain yaitu ○ (lingkaran putih) dan ● (lingkaran hitam) (Musa, 2018) (Tampubolon, 2024). Ide ini telah diterapkan dalam konteks pendidikan bagi siswa tunarungu (tuli) dengan bantuan aplikasi (Santoso, et al., 2020).

METODE

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis secara mendalam proses langkah ekuivalen dalam menyederhanakan ekspresi proposisi, sekaligus memastikan bahwa hasil setiap langkah ekuivalen akan tetap mempertahankan makna simbol tanpa mengubah konteks awalnya (Apriyani, 2021). Penelitian ini menggunakan metode kualitatif-deskriptif dengan pendekatan problem-solving berbasis logika simbolik untuk mengeksplorasi efektivitas dan konsistensi penerapan langkah ekuivalen. Data dalam penelitian ini diperoleh melalui pengembangan studi literatur serta eksperimen pemecahan masalah yang menggunakan logika dua nilai dengan simbol ○ (lingkaran putih) dan ● (lingkaran hitam). Penelitian ini dilakukan secara sistematis melalui beberapa tahapan yang dirancang untuk memahami penerapan langkah ekuivalen dalam pemecahan masalah logika.

Tahap pertama adalah penyusunan pedoman ekuivalen, yang melibatkan perumusan aturan substitusi simbol logika berdasarkan referensi tabel kaidah logika dua nilai, yaitu ○ dan ●. Langkah berikutnya adalah pengembangan soal problem-solving, yang bertujuan untuk mendesain masalah logika guna menguji penerapan langkah ekuivalen serta mengidentifikasi kesalahan yang mungkin terjadi dalam proses pemecahan. Setelah itu, dilakukan eksperimen simulasi, di mana masalah yang telah dirancang diberikan kepada pemelajar untuk menganalisis pemahaman mereka serta efisiensi dalam menerapkan langkah-langkah ekuivalen. Selain itu, penelitian ini juga mencakup tahap evaluasi kesalahan, yang bertujuan untuk mengidentifikasi berbagai jenis kesalahan yang muncul selama proses penyelesaian masalah, termasuk miskonsepsi logika serta penggunaan simbol yang keliru. Seluruh hasil penelitian dianalisis secara deskriptif untuk mengungkap pola kesalahan yang terjadi, tingkat efisiensi langkah yang digunakan, serta pemahaman pemelajar terhadap logika simbolik. Melalui pendekatan ini, penelitian diharapkan dapat memberikan wawasan mendalam mengenai bagaimana langkah-langkah ekuivalen dapat diterapkan secara efektif dalam pemecahan masalah berbasis logika (Yohanes & Dian, 2025).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Tahap 1: Penyusunan pedoman ekuivalen: Merumuskan aturan substitusi simbol logika berdasarkan referensi tabel kaidah logika dua nilai yaitu yaitu ○ dan ●.

Penerapan langkah-langkah ekuivalen dalam logika memerlukan pedoman yang jelas dan sistematis agar dapat diikuti dengan konsisten (Smullyan, 2009). Penelitian ini mengikuti pedoman yang ketat untuk memastikan konsistensi dalam penggunaan simbol. Setiap simbol atau sekelompok simbol harus memiliki makna tunggal. Selain itu, sistem logika yang digunakan hanya memiliki dua nilai, yaitu ○ (lingkaran putih) dan ● (lingkaran hitam). Urutan preseden ditetapkan sebagai berikut: ¬, ∧, ∨, →, ↔. Sebagai referensi, digunakan Tabel 1, Tabel 2, dan Tabel 3. Selain itu, tanda " ≡ " digunakan untuk menunjukkan ekuivalensi logis.

Tabel 1. Makna Koneksi P dan Q

P	Q	Pernyataan Dalam Bahasa Indonesia	Simbol
○	○	semua P dan Q adalah ○	P∧Q ≡ ○
○	●	salah satu P, Q adalah ○, atau salah satu P, Q adalah ●	P⊕Q ≡ ○
●	○		
●	●	semua P dan Q adalah ●	P∨Q ≡●

Tabel 2. Tabel koneksi ∧, ∨, ⊕, →, ↔

P	Q	P∧Q	P∨Q	P⊕Q	P→Q	P↔Q
○	○	○	○	●	○	○
○	●	●	○	○	●	●
●	○	●	○	○	○	●
●	●	●	●	●	○	○

Proses substitusi simbol dalam Logika Simbolik ke dalam Bahasa Indonesia mengikuti aturan yang telah ditetapkan berdasarkan tabel referensi. Berdasarkan Tabel 1, simbol ¬P dapat diucapkan sebagai negasi P, selain P, tidak termasuk P, atau bukan P. Selanjutnya, menurut Tabel 3, ekspresi P∧Q diucapkan sebagai "P dan Q", sementara P∨Q diucapkan sebagai "P atau Q" dalam arti inklusif. Untuk ekspresi P⊕Q, masih berdasarkan Tabel 3, diterjemahkan sebagai "P atau Q" dalam arti eksklusif. Selain itu, P→Q dapat diucapkan sebagai "jika P maka Q," sedangkan berdasarkan Tabel 4, P↔Q diartikan sebagai "P jika dan hanya jika Q." Konvensi ini memastikan bahwa setiap simbol logika memiliki padanan yang jelas dan konsisten dalam Bahasa Indonesia.

Tahap 2: Pengembangan soal *problem-solving*: Mendesain masalah logika untuk menguji langkah ekuivalen dan mengidentifikasi kesalahan pemecahan.

Langkah-langkah ekuivalen dalam logika dapat diajarkan kepada pemelajar dengan menggunakan metode *problem solving*. *Problem-solving* biasanya diberikan dalam bentuk soal. Pemelajar diminta untuk mencari pemecahan atau solusinya. Dengan demikian, pemelajar dapat memahami konsep langkah-langkah ekuivalen semakin mendalam dan praktis.

Tulisan ini memberikan dua contoh problem dan pemecahannya secara runtut dan logis, serta diberikan tiga contoh problem tanpa pemecahan. Berikut ini adalah dua buah contoh proses pembuktian ekuivalensi dalam masalah logika beserta pemecahannya:

Problem 1: Tunjukkan bahwa jika P∨Q ≡ ○, P→R ≡ ○, dan Q→R ≡ ○, maka R ≡ ○.

Pemecahan: Untuk membuktikan permasalahan ini, digunakan fakta yang telah diketahui dan langkah-langkah ekuivalen berdasarkan Tabel 3. Diketahui bahwa P∨Q ≡ ○, P→R ≡ ○, dan Q→R ≡ ○, sehingga perlu dibuktikan bahwa R ≡ ○. Sebagai langkah awal, diasumsikan bahwa R ≡ ●. Berdasarkan Tabel 3, asumsi R ≡ ● dan Q→R ≡ ○ akan menghasilkan Q ≡ ●. Selanjutnya, dengan asumsi R ≡ ● dan P→R ≡ ○, diperoleh bahwa P ≡ ●. Karena P ≡ ● dan Q ≡ ●, maka P∨Q ≡ ●. Namun, P∨Q ≡ ● kontradiksi dengan P∨Q ≡ ○. Kontradiksi ini menunjukkan bahwa asumsi awal, yaitu R ≡ ●, tidak dapat diterima. Oleh karena itu, kesimpulan yang benar adalah R ≡ ○.

Problem 2: Dengan menggunakan acuan ○, sederhanakan bentuk: ((¬R⊕(W∧Y)→ ¬Q∧¬P)→P∧¬Q)∧(P⊕(W∧Y) → ¬Q∧¬R)∧ ¬(¬Q∧W∧Y→¬P).

Pemecahan:

Dengan acuan ○, selanjutnya dapat ditulis ((¬R⊕(W∧Y)→ ¬Q∧¬P)→P∧¬Q)∧(P⊕(W∧Y)→ ¬Q∧¬R)∧ ¬(¬Q∧W∧Y→¬P) ≡ ○ (Langkah 1). Berdasarkan Tabel 2 diperoleh ((¬R⊕(W∧Y)→ ¬Q∧¬P)→P∧¬Q) ≡ ○ dan (P⊕(W∧Y)→ ¬Q∧¬R) ≡ ○ dan ¬(¬Q∧W∧Y→¬P) ≡ ○ (Langkah 2). Selanjutnya berdasarkan Tabel 1 diperoleh ¬Q∧W∧Y→¬P ≡ ● dan ((¬R⊕(W∧Y)→ ¬Q∧¬P)→P∧¬Q) ≡ ○ dan (P⊕(W∧Y)→ ¬Q∧¬R) ≡ ○ (Langkah 3). Selanjutnya berdasarkan Tabel 3 diperoleh ¬Q∧W∧Y≡ ○ dan ¬P ≡ ● dan ((¬R⊕(W∧Y) → ¬Q∧¬P)→P∧¬Q) ≡ ○ dan (P⊕(W∧Y)→ ¬Q∧¬R) ≡ ○ (Langkah 4). Selanjutnya berdasarkan Tabel 2 diperoleh ¬Q ≡ ○ dan W ≡

○ dan Y ≡ ○ dan ¬P ≡ ● dan $\big((\neg R\oplus(W\wedge Y)\to \neg Q\wedge\neg P)\to P\wedge\neg Q\big)$ ≡ ○ dan $(P\oplus(W\wedge Y)\to \neg Q\wedge\neg R)$ ≡ ○ (Langkah 5). Nilai ¬Q, W, Y dan ¬P disubstitusikan ke $\big((\neg R\oplus(W\wedge Y)\to \neg Q\wedge\neg P)\to P\wedge\neg Q\big)$ ≡ ○ dan ke $(P\oplus(W\wedge Y)\to\neg Q\wedge\neg R)$ ≡ ○ sehingga diperoleh 4 nilai variabel dan 2 proposisi, yaitu ¬Q ≡ ○ dan W ≡ ○ dan Y ≡ ○ dan ¬P ≡ ● dan ((¬R⊕ (○∧○)→ ○∧●)→○∧○) ≡ ○ dan (○ ⊕(○∧○)→ ○ ∧¬R) ≡ ○ (Langkah 6). Selanjutnya berdasarkan Tabel 3, diperoleh ¬Q ≡ ○ dan W ≡ ○ dan Y ≡ ○ dan ¬P ≡ ● dan ((¬R⊕ ○→ ●)→○) ≡ ○ dan (○ ⊕ ○→ ¬R) ≡ ○ (Langkah 7). Selanjutnya berdasarkan Tabel 3 diperoleh ¬Q ≡ ○ dan W ≡ ○ dan Y ≡ ○ dan ¬P ≡ ● dan ○ ≡ ○ dan (●→¬R) ≡ ○ (Langkah 8). Selanjutnya berdasarkan Tabel 3 diperoleh ¬Q ≡ ○ dan W ≡ ○ dan Y ≡ ○ dan ¬P ≡ ● dan ○ ≡ ○ dan ○ ≡ ○ (Langkah 9). Selanjutnya berdasarkan Tabel 2 diperoleh P∧¬Q∧W∧Y∧ ○ ∧ ○≡ ○ (Langkah 10). Selanjutbya berdasarkan berdasarkan Tabel 3 diperoleh P∧¬Q∧W∧Y ≡ ○. (Langkah 11).

Berdasarkan langkah-langkah yang telah diuraikan, dapat disimpulkan bahwa dengan acuan ○, bentuk paling sederhana dari *Problem Solving* 2 adalah P∧¬Q∧W∧Y. Esensi dari proses pembuktian ekuivalensi pada permasalahan ini mencakup beberapa tahapan. Langkah-langkah 1 hingga 5 melibatkan proses penyederhanaan (simplifikasi), yang bertujuan untuk mereduksi kompleksitas ekspresi logika. Selanjutnya, pada langkah 6 hingga 8, dilakukan penggantian (substitusi) nilai-nilai variabel ke dalam ekspresi logika yang telah disederhanakan. Kemudian, pada langkah 9, dilakukan pembangunan (konstruksi) untuk menggabungkan kembali ekspresi-ekspresi yang telah disederhanakan dan disubstitusi. Akhirnya, pada langkah 10 dan 11, dilakukan penyederhanaan akhir untuk mencapai bentuk paling sederhana dari ekspresi logika tersebut. Esensi dari langkah-langkah pembuktian ekuivalen logis ini adalah simplifikasi, substitusi, dan konstruksi.

Berikut ini contoh lain problem tanpa *solving* (pemecahan).

Problem 3. Tunjukkanlah bahwa jika ¬P∧(Q∨R), ¬P → R, Q→R, ¬P∨Q→R, ¬(¬Q→¬P∧¬R) semuanya dalah ○ maka ¬Q∧R pasti juga ○.

Problem 4. Jika ¬(P→¬W) ≡ ○ sederhanakanlah

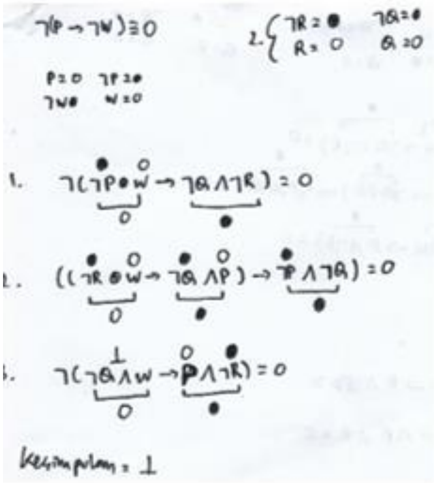
$\neg(\neg P\oplus W\to\neg Q\wedge\neg R)\wedge\big((\neg R\oplus W\to \neg Q\wedge P)\to\neg P\wedge\neg Q\big)\wedge\neg(\neg Q\wedge W\to P\wedge\neg R)$.

Problem 5 Menggunakan acuan ● sederhanakanlah bentuk berikut ini

$(\neg B\vee C\to\neg A)\vee(C\to\neg A)\wedge\big(\neg B\to(\neg C\to\neg A)\big)\wedge(D\to\neg C)$

<u>Tahap 3</u>: Eksperimen simulasi: Menerapkan masalah kepada pemelajar untuk menganalisis pemahaman dan efisiensi langkah ekuivalen yang diambil.

Dalam pembelajaran Logika Simbolik, penting untuk memberikan pemecahan masalah kepada pemelajar. Dari pemecahan yang diberikan oleh pemelajar, kesalahan dalam langkah-langkah mereka dapat terlihat. Untuk mengatasi kesalahan ini, pemelajar perlu mendapatkan arahan untuk mencari pemecahan yang benar. Proses ini diulang hingga pemelajar berhasil menemukan pemecahan yang tepat. Pemecahan yang tepat memiliki dua karakteristik utama: semua langkahnya benar dan sedikit langkah yang dibutuhkan. Semakin sedikit langkah yang dibutuhkan untuk mencapai pemecahan, semakin efisien pemecahan tersebut. Setiap langkah yang dilakukan oleh pemelajar harus langkah yang benar.



Gambar 1. Contoh Pemecahan yang Tepat

Tahap 4: Evaluasi kesalahan: Mengidentifikasi jenis-jenis kesalahan, termasuk miskonsepsi logika dan penggunaan simbol yang keliru.

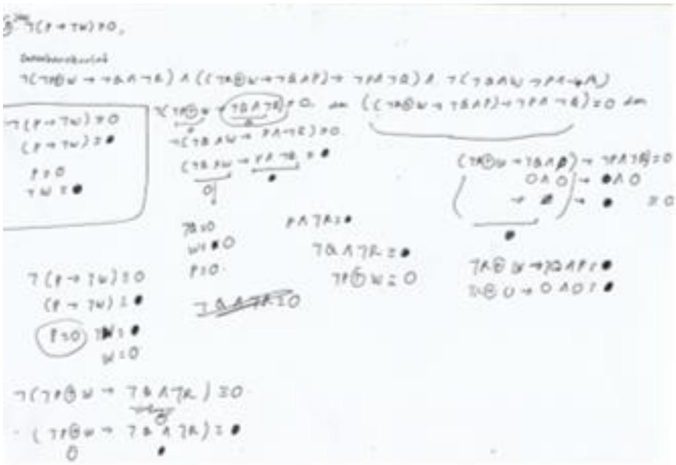
Pada Tahap 4 ini ada dua hal yang dilihat, yaitu mendeteksi kesalahan langkah dan yang kedua adalah langkah yang efisien dalam pemecahan masalah. Pada tahap mendeteksi kesalahan langkah, ada tiga kesalahan langkah yang umumnya dilakukan pemelajar. Pertama, pemelajar salah memahami makna koneksi "dan”. Pemahaman simbol P∧Q ≡ ● menjadi salah jika ini diartikan sebagai "P dan Q adalah ●". Jika diartikan sebagai "P dan Q adalah ●", maka akan menghasilkan makna P dan Q keduanya adalah ●. Seharusnya, P∧Q ≡ ● diartikan sebagai P ≡ ● atau Q ≡ ●. Dalam hal ini koneksi “atau” yang digunakan adalah "atau inklusif". Dengan menggunakan "atau inklusif" selanjutnya P∧Q ≡ ● adalah ekuivalen dengan: (P ≡ ● dan Q ≡ ●), atau (P ≡ ● dan Q ≡ ○), atau (P≡ ○ dan Q ≡ ●). Kedua, pemelajar tidak membedakan antara P∨Q dan P⊕Q. Kedua simbol ini dapat dilafalkan menjadi "P atau Q". Walaupun sama sama dilafalkan "P atau Q", kedua simbol ini memiliki makna berbeda. P∨Q berarti bahwa salah satu atau kedua pernyataan P dan Q adalah ○, sedangkan P⊕Q adalah “atau eksklusif” yang memiliki arti "salah satu P atau Q adalah ○” (tetapi tidak keduanya). Ketiga, salah saat melibatkan simbol seperti ●≡○, P∧●≡○, P→○≡●, ●→P≡○, dan ○∨P≡●. Tabel 4 memberikan contoh langkah yang salah dan langkah yang benar.

Tabel 3. Langkah Salah dan Benar

Bentuk Kontradiksi	Langkah Salah	Langkah Benar
●≡ ○	Simbol dihapus	⊥
P∧●≡○	P ≡○	⊥
P→ ○≡●	P ≡●	⊥
●→P ≡○	P ≡●	○≡○
○ ∨P ≡ ●	P ≡●	⊥

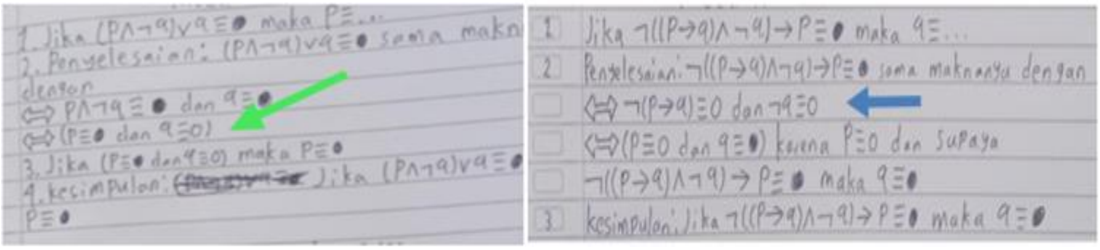
$\perp$ adalah simbol kontradiksi. Kontradiksi terjadi pada bentuk ●≡○, atau terjadi saat P ≡ ○ dan sekaligus P ≡ ●.

Pada tahap langkah efisien dalam pemecahan masalah, langkah efisien dilihat dari banyaknya langkah menuju langkah akhir pemecahan. Semakin sedikit langkah yang diperlukan oleh seorang pemelajar menuju pemecahan, semakin efisien proses tersebut. Sebagai ilustrasi dapat merujuk pada Gambar 1 dan Gambar 2, yang menampilkan dua pendekatan berbeda terhadap pemecahan soal yang sama, yaitu Problem 4. Pada Gambar 1, terlihat sebuah pemecahan yang singkat dan benar. Berbeda dengan pemecahan yang ditunjukkan oleh pemelajar dalam Gambar 2. Gambar 2 menunjukkan pemelajar yang sering mengulangi langkah yang sama dan cenderung memilih langkah yang semakin kompleks. Ini adalah contoh pemecahan yang tidak hanya bertele-tele, tetapi juga masih salah.



Gambar 2. Contoh Pemecahan yang Bertele-tele dan Masih Salah

Dalam melakukan pemecahan problem, penting untuk menghindari pendekatan yang tidak efisien. Mengulang-ulang langkah yang sama atau memilih langkah yang semakin rumit tidak hanya membuang waktu, tetapi juga dapat mengarah pada pemecahan yang tidak benar. Oleh karena itu, pemelajar perlu mengembangkan keterampilan dalam merencanakan pendekatan yang efisien, mengevaluasi pemecahan secara kritis, dan meminimalkan tindakan yang tidak perlu. Penting untuk diingat bahwa efisiensi dalam pemecahan masalah tidak hanya berarti menyelesaikan masalah dengan cepat, tetapi juga dengan benar. Dalam belajar pemecahan problem, pemelajar harus fokus pada pengembangan keterampilan yang memungkinkan mereka untuk menemukan solusi yang tepat dalam waktu yang efisien. Pemelajar juga perlu memperhatikan bahwa langkah ekuivalen mengharuskan konsistensi. Gambar 3 menunjukkan langkah yang tidak konsisten. Pada gambar 3 (ditunjukkan oleh tanda panah) tampak nilai q semula adalah ● berubah menjadi ○. Perubahan nilai ini menunjukkan langkah yang tidak konsisten. Gambar 4 menunjukkan langkah yang tidak mengikuti urutan preseden. Pada gambar 4 (ditunjukkan oleh tanda panah), seharusnya $\big((p\to q)\wedge\neg q\big)\to p$ ≡● ekuivalen dengan $(p\to q)\wedge\neg q$ ≡○ dan p ≡●,



Gambar 3. contoh Pemecahan yang Tidak Konsisten dan Tidak mengikuti Urutan Presenden

KESIMPULAN

Setelah meninjau berbagai aspek penggunaan simbol ○ (lingkaran putih) dan ● (lingkaran hitam) dalam langkah-langkah ekuivalen, beberapa kesimpulan dapat diambil. Pertama, dalam logika dua nilai, simbol ○ dan ● dapat digunakan untuk menyederhanakan pernyataan logika, membantu dalam visualisasi dan pemahaman konsep. Kedua, pembuktian ekuivalen logis merupakan keterampilan penting yang dapat diajarkan melalui metode pemecahan masalah. Dengan memberikan berbagai masalah yang memerlukan penerapan langkah-langkah ekuivalen, pemelajar dapat memahami konsep ini dengan lebih baik. Esensi dari pembuktian ekuivalen logis meliputi simplifikasi, substitusi, dan konstruksi. Ketiga, pembelajaran logika yang efektif melalui pemecahan masalah harus menawarkan berbagai pilihan langkah penyelesaian. Dengan demikian, pemelajar dapat mencoba berbagai pendekatan, mengidentifikasi, dan memperbaiki kesalahan langkah yang mungkin terjadi, seperti ketidakkonsistenan, tidak mengikuti aturan preseden, dan kontradiksi. Keempat, kontradiksi sering muncul dalam bentuk seperti ●≡○, P∧●≡○, P→○≡●, ●→P≡○, dan ○∨P≡●. Penting bagi pemelajar untuk diajarkan cara mengidentifikasi dan menghindari kontradiksi semacam itu. Dengan memahami kesimpulan-kesimpulan ini, proses pembelajaran langkah ekuivalen dapat ditingkatkan melalui penekanan pada pemahaman konsep, pencegahan kesalahan umum, dan penerapan metode pembelajaran yang efektif.

DAFTAR PUSTAKA

Apriyani, D. C. N. (2021). Materi Prasyarat Dan Miskonsepsi Terkait Keterampilan Aljabar. In *Seminar Nasional Hasil Penelitian dan Abdimas Tahun* (p. 92).

Ben-Ari, M. (2012). *Mathematical Logic for Computer Science.* London: Springer-Verlag.

Chrismanto, A. R., Nendya, M. B., Tampubolon, J. K., Santosa, R. G., Sudarma, W. E., & Hermawan, H. (2020). Inovasi Pembelajaran Logika-Simbolik melalui Aplikasi DUTAlogic bagi Siswa Tunarungu. *JP (Jurnal Pendidikan): Teori Dan Praktik*, *5*(1). https://doi.org/10.26740/jp.v5n1.p%p

Gereda, A. (2022). *LANGUAGE LOGIC: Prinsip-Prinsip Pernalaran Berbahasa*. Purwokerto: AMERTA MEDIA.

Grassmann, W. K. (1996). *Logic and Discrete Mathematics, A Computer Science Perspective.* New Jersey: Prentice Hall.

Gultom, G. A., Simatupang, D. A., Purba, S. G. A., Rumapea, M. S., & Sinaga, C. V. R. (2025). Resistensi Mahasiswa Dalam Mengatasi Kesulitan Belajar Struktur Aljabar di Universitas HKBP Nommensen Pematangsiantar. *As-Salam: Journal Islamic Social Sciences and Humanities*, *3*(1), 44-54. https://ejournal.as-salam.org/index.php/assalam/article/view/86

Musa, L. (2018). *Alat peraga matematika*. Pare-Pare: Penerbit Aksara Timur.

Nato, S. F., Taga, G., Suryani, L., & We'u, G. (2024). STRATEGI GURU PENGGERAK DALAM MENINGKATKAN LITERASI DAN NUMERASI SISWA SEKOLAH DASAR. *JUPIKA: JURNAL PENDIDIKAN MATEMATIKA*, *7*(2), 97-107. DOI: https://doi.org/10.37478/jupika.v7i2.4562

Nursyahida, S. (2022). Analisis Proposisi Dengan Metode Pohon Semantik. *Jurnal Matematika dan Sains (JMS)*, *2*(1), 165-174. DOI: https://doi.org/10.552273/jms.v2i1.163

Prayogo, P., & Fauzi, M. (2015). PENERAPAN LOGIKA BOOLEAN DALAM PROGRAM PERMINTAAN BARANG BERBASIS WEB. *Buana Matematika: Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika*, *5*(1), 35-42. https://doi.org/10.36456/buanamatematika.v5i1:.273

Prihandoko, A. C. (2006). *Memahami konsep matematika secara benar dan menyajikannya dengan menarik.* Jakarta: Depdiknas.

Rosadi, D., & Praswidhianingsih. (2009). PEMBUKTIAN PERNYATAAN LOGIKA PROPOSISI. *Jurnal Computech & Bisnis*, 100-104.

Rosen, K. H. (2012). *Discrete Mathematics and Its Applications.* New York: The McGraw-Hill Companies, Inc.

Santosa, R. G., & Tampubolon, J. K. (2020). Pelatihan Cara Berpikir Simbolik-Matematik Di Sma Bopkri 2 Yogyakarta. *International Journal of Community Service Learning*, *4*(1), 35-43. DOI: https://doi.org/10.23887/ijcsl.v4i1.23099

Smullyan, R. M. (2009). *Logical Labyrinths.* Massachusetts : A K Peters, Ltd.

Suciati, I. (2024). *LOGIKA DAN HIMPUNAN MATEMATIKA: Terintegrasi Literasi Numerasi Berbasis Budaya*. Gowa: CV. Ruang Tentor.

Tampubolon, J. K. (2020). *Simbol Natural, Dasar Logika untuk Matematika dan Informatika.* Yogyakarta: Duta Wacana University Press.

Tampubolon, J. K. (2024). *Modul Pelatihan Logika Simbolik.* Yogyakarta: Hak Cipta,EC00202421305.

Woe, E., Suryani, L., & Mei, M. F. (2024). IDENTIFIKASI PERMASALAHAN GURU PENGGERAK PADA PENINGKATAN LITERASI DAN NUMERASI SISWA SEKOLAH DASAR. *JUPIKA: JURNAL PENDIDIKAN MATEMATIKA*, *7*(2), 186-194. DOI: https://doi.org/10.37478/jupika.v7i2.4561

Yohanes, R. S., & Dian, M. (2025). Strategi Mengatasi Miskonsepsi Mahasiswa dengan menggunakan Pendekatan Konflik Kognitif. *Ainara Journal (Jurnal Penelitian dan PKM Bidang Ilmu Pendidikan)*, *6*(1), 83-92. DOI: https://doi.org/10.54371/ainj.v6i1.772