ANALISIS KETELITIAN APROKSIMASI SINUSOIDAL DALAM PENGUKURAN INDEKS BIAS LARUTAN SUKROSA ($C_{12}H_{22}O_{11}$) BERBASIS DERET TAYLOR

Hasan Miftahudin[1*], Steven Nathanael Setiawan[2], Fajar Arianto[3]
[1,2] Program Studi Fisika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang, Indonesia
[3] Departemen Fisika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang, Indonesia
**Corresponding Author:* hasanmiftahudinfisikaundip@gmail.com

ABSTRAK

Ilmu eksakta memiliki peran penting dalam pengembangan perangkat optik yang mendukung kemajuan teknologi modern dan mempermudah kehidupan manusia. Perangkat optik perlu menekankan kepresisian pengukuran seperti aproksimasi matematis dari hukum Snellius pada konsentrasi suatu larutan. Peningkatan kepresisian pengukuran dapat dicapai menggunakan pendekatan deret Taylor melalui aproksimasi fungsi sinusoidal suatu larutan. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis pengaruh kesalahan pemotongan (*truncation error*) pada aproksimasi sinusoidal orde pertama dan kedua dalam pengukuran indeks bias larutan sukrosa. Metode yang digunakan yakni metode pendekatan ekperimental dan teoritis. Eksperimen dilakukan dengan mengukur indeks bias menggunakan refraktometer Abbe. Indeks bias diukur pada tiga variasi konsentrasi larutan (5 g/100 mL,10 g/100 mL,15 g/100 mL). Data eksperimental kemudian dibandingkan dengan perhitungan teoretis berbasis hukum Snellius dengan aproksimasi sinusoidal orde pertama dan kedua menggunakan ekspansi deret Taylor. Hasil menunjukkan konsentrasi sukrosa berbanding lurus dengan kenaikan indeks biasnya. Sementara itu, kesalahan pemotongan (*truncation error*) teramati meningkat pada sudut datang yang besar dan pada larutan sukrosa yang encer, dengan konsentrasi rendah. Aproksimasi orde pertama menunjukkan deviasi signifikan, sedangkan orde kedua menghasilkan nilai yang lebih mendekati hasil eksperimen. Temuan ini menegaskan krusialnya penggunaan orde lebih tinggi dalam perhitungan optik presisi menengah. Penelitian ini diharapkan dapat berkontribusi pada peningkatan praktik pengajaran fisika serta pengembangan metode pengukuran berbasis refraktometri di bidang optik.

Kata kunci: larutan sukrosa, indeks bias, deret Taylor, hukum Snellius, kesalahan pemotongan

ABSTRACT

The exact sciences play a pivotal role in the development of optical instruments that underpin modern technological progress and enhance daily life. The efficacy of these optical devices hinges upon the precision of their measurements, which often involves mathematical approximations such as the application of Snell's Law to determine the concentration of a

solution. To enhance metrological precision, this study leverages the Taylor series to approximate the sinusoidal function inherent in Snell's Law. This research aims to analyze the influence of truncation error in first- and second-order sinusoidal approximations for the measurement of the refractive index in sucrose solutions. A methodology combining both experimental and theoretical approaches was employed. Experimentally, the refractive index of sucrose solutions at three distinct concentrations (5 g/100 mL, 10 g/100 mL, and 15 g/100 mL) was measured using an Abbe refractometer. These empirical data were subsequently compared against theoretical calculations derived from Snell's Law, utilizing both first- and second-order approximations from the Taylor series expansion. The results indicate a direct proportionality between the sucrose concentration and its corresponding refractive index. More significantly, the truncation error was observed to escalate at large angles of incidence and in more dilute, low-concentration solutions. While the first-order approximation exhibited significant deviation, the second-order approximation yielded values in much closer agreement with the experimental data. This finding underscores the criticality of employing higher-order approximations for achieving medium-precision in optical calculations. This study is expected to contribute to the enhancement of physics pedagogy and the advancement of refractometry-based measurement methodologies in the field of optics.

Keywords: sucrose solution, refractive index, Taylor series, Snell's law, truncation error

PENDAHULUAN

Indeks bias merupakan salah satu parameter mendasar yang esensial di bidang optik (Zhong et al., 2025). Parameter inilah yang menggambarkan perubahan kecepatan gelombang cahaya ketika melewati batas antara dua medium dengan karakteristik optik yang berbeda. Indeks bias dalam optik digunakan sebagai penentu sudut pantulan dan pembiasan cahaya melalui berbagai bahan atau material, seperti kaca dan berlian. Indeks bias termasuk sifat intrinsik fundamental yang menentukan presisi pengukuran dalam elaborasi alat-alat optik, seperti refraktometer larutan, teleskop, mikroskop, kamera, kacamata, dan kaca pembesar (lup). Menurut Koriston et al., 2025 pada artikel ilmiah berjudul "Pengembangan Modul Ajar Fisika Berbasis Tradisi Monyilo untuk Mendukung Implementasi Kurikulum Merdeka", indeks bias suatu medium didefinisikan sebagai rasio antara kecepatan cahaya dalam ruang hampa terhadap kecepatan cahaya dalam medium tertentu. Nilai indeks bias tidak bersifat konstan melainkan sangat dipengaruhi oleh sifat kolektif dari mediumnya. Pengaruh ini utamanya muncul ketika partikel-partikel dalam medium tersebut berinteraksi satu sama lain melalui mekanisme difusi cahaya. Pada medium berdensitas tinggi, indeks bias ditentukan oleh fenomena fisis yang dikenal sebagai *dependent multiple scattering* (hamburan ganda dependen). Fenomena ini muncul akibat interferensi medan elektromagnetik ketika partikel-partikel berada dalam kedekatan spasial yang signifikan, sehingga medan yang dihasilkan satu partikel memodifikasi respons optik partikel lainnya. Interaksi kolektif tersebut menghasilkan hubungan nonlinier antara densitas partikel dan indeks bias efektif medium. Dengan demikian, meskipun kontribusi optik setiap partikel bersifat aditif secara individual, peningkatan densitas tidak menyebabkan indeks bias bertambah tanpa batas, melainkan mencapai nilai maksimum (saturasi) sebagai konsekuensi dari efek interferensi.

Studi yang dilakukan oleh Elsayad (2019) membuktikan bahwa indeks bias memang

terkait erat dengan kerapatan massa dan sifat mekanik suatu media, menjadikannya biomarker yang berharga. Studi yang dilakukan oleh Kurniawati & Suryani (2023), juga membuktikan bahwa karakteristik fisik, seperti komposisi komponen material dan kerapatan medium memengaruhi nilai indeks bias, terutama dalam konteks dispersi optik di mana panjang gelombang cahaya menjadi faktor penting dalam variasi *n*. Indeks bias suatu medium menunjukkan ketergantungan pada panjang gelombang cahaya yang melewatinya, fenomena yang dikenal sebagai dispersi optik. Perbedaan nilai indeks bias suatu zat dengan zat yang lain berkaitan langsung dengan perbedaan kerapatan mediumnya (Kurniawati & Suryani, 2023). Ketidaksamaan hasil nilai indeks bias nantinya berdampak pada perbedaan sudut penyimpangan (deviasi) selama proses dispersi. Pernyataan tersebut dapat divalidasi dengan penelitian oleh Sasaki (2022), hasil risetnya menunjukkan indeks bias memengaruhi sudut penyimpangan maksimum lokal, imajiner indeks bias. Fenomena ini tidak hanya penting dalam menjelaskan sifat dasar cahaya, tetapi juga memainkan peran krusial dalam pengembangan berbagai piranti atau instrument optik modern, seperti sensor dan sistem komunikasi berbasis cahaya.

Ketika cahaya merambat dari suatu medium ke medium lain dengan kerapatan yang berbeda, terjadi fenomena pembiasan cahaya yang dapat dijelaskan secara matematis oleh Hukum Snellius, yang menyatakan bahwa $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$, di mana n_1 dan n_2 adalah indeks bias masing-masing medium, dan θ_1 dan θ_2 adalah sudut insiden dan sudut pembiasan cahaya (Murniati et al., 2023). Hukum Snellius sendiri menjelaskan fenomena cahaya "melengkung" saat melewati media yang berbeda, seperti transisi dari udara ke air atau kaca. Pemahaman yang komprehensif tentang hukum ini sangat penting untuk kemajuan instrumen optik dan aplikasi spektroskopi. Dalam banyak kasus, fungsi sinus diapproksimasi menggunakan deret Taylor, terutama pada sudut kecil. Aproksimasi ini menyederhanakan perhitungan dan membuatnya lebih cepat. Untuk sudut sudut kecil dan khususnya dalam kondisi deviasi minimum, sin θ dapat diasumsikan θ, sehingga persamaan Snellius disederhanakan menjadi $n_1\theta_1 \approx n_2\theta_2$. Dari asumsi maka diperoleh sudut deviasi d_m dapat diasumsikan $\approx d$ (Devi Susilayani, 2017).

Deret Taylor sering digunakan dan diterapkan dalam ilmu matematika, terutama dalam aproksimasi. Deret Taylor bentuknya banyak, di sini yang digunakan ialah fungsi sinus, dapat dituliskan dalam persamaan matematis sebagai berikut:

$$\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \cdots$$

Telah dibuktikan bahwa menggunakan hanya satu suku pertama dari deret atau terlalu banyak suku diabaikan maka menyebabkan kesalahan pemotongan (truncation error), kesalahan ini dapat menjadi signifikan terutama saat sudut datang atau sudut biasnya tidak bernilai kecil (Vestermark, 2025). Dalam konteks optik presisi tinggi, seperti spektroskopi dan refraktometri, kesalahan pemotongan ini berpotensi memberikan pengaruh negatif terhadap pengukuran indeks bias yang sangat bergantung pada akurasi sudut yang diukur.

Penggunaan medium cair yang mengandung sukrosa terlarut didasarkan pada premis bahwa indeks bias dapat dikalibrasi secara efektif dengan mengubah konsentrasi sukrosa terlarut secara linier. Dalam studi yang dilakukan oleh Didik et al., 2021, terbukti bahwa larutan sukrosa dalam rentang 0–50% menunjukkan hubungan linier antara konsentrasinya dan nilai hasil yang ditentukan dengan metode difraksi Fraunhofer. Besaran *n* perlu

dipertimbangkan. Metode ini diasumsikan sebagai model standar karena kemudahan penggunaannya dan stabilitasnya. Selain itu, Miranda & Sudarti (2022) mengajukan hipotesis bahwa tingkat konsentrasi sukrosa memiliki pengaruh signifikan terhadap indeks bias, dengan pergeseran dari 1,333 menjadi 1,402 yang diamati pada panjang gelombang tampak.

Studi-studi banyak menunjukkan bahwa ketelitian pengukuran indeks bias semakin esensial dalam penelitian ilmiah kontemporer karena sangat menentukan seberapa berkualitas suatu data di bidang sensor optik, *bioimaging*, dan analisis spektroskopi dengan presisi tinggi. Namun, aspek matematis kesalahan pemotongan dalam perhitungan sudut, misalnya perkiraan $\sin(\theta) \approx \theta$, jarang mendapat perhatian dalam konteks larutan sukrosa. Sejumlah kajian sebelumnya lebih berfokus pada hubungan konsentrasi sukrosa dengan indeks bias menggunakan metode eksperimen optik. Tetapi, kajian mengenai kesalahan pemotongan pada aproksimasi sinusoidal dalam hukum Snellius belum banyak dilakukan. Oleh karena itu, untuk mengisi celah tersebut, kajian dilakukan.

Kebaruan kajian ini terletak pada analisis sistematis *truncation error* pada orde pertama dan kedua deret Taylor, yang dikombinasikan dengan data eksperimen refraktometer. Dengan demikian, penelitian ini tidak hanya mengisi celah pada kajian teoritis, tetapi juga memberikan kontribusi praktis dalam pembelajaran fisika optik dan pengembangan instrumen refraktometri presisi menengah. Berdasarkan jabaran di atas maka tujuan penelitian ini adalah untuk menganalisis pengaruh kesalahan pemotongan (*truncation error*) pada aproksimasi sinusoidal orde pertama dan kedua dalam pengukuran indeks bias larutan sukrosa, agar kita dapat lebih memahami penerapan dari deret Taylor untuk bidang fisika. Diharapkan dengan adanya hasil penelitian ini akan dapat memperkuat validitas dan presisi metode pengukuran optik, sehingga memberikan pedoman praktis untuk aproksimasi matematis akurat yang dibutuhkan oleh peneliti dan insinyur optik di masa depan yang akan berguna untuk kelanjutan metode pengajaran di bidang fisika. Selain itu, penelitian ini dapat menjadi rujukan dalam pengembangan sistem sensor optik modern yang bergantung pada pengukuran indeks bias dengan ketelitian tinggi.

METODE

Metode penelitian yang digunakan adalah pendekatan eksperimental dan teoritis. Pendekatan eksperimental adalah metode penelitian kuantitatif yang dianggap baku karena bersifat objektif dan presisi dalam menjawab hipotesis hubungan sebab-akibat antara variabel bebas dan terikat dalam kondisi terkendali (Yunitri et al., 2024). Pendekatan teoritis adalah metode yang bertujuan untuk mengumpulkan dan menganalisis data kualitatif guna mengembangkan teori yang "didasarkan" pada data tersebut (Paul & Bandyopadhyay, 2019). Penelitian ini telah dilaksanakan pada bulan Mei 2025 di Laboratorium Fisika, Universitas Diponegoro dalam rangkaian praktikum Fisika Dasar 2.

Alat dan bahan dalam penelitian ini meliputi refraktometer Abbe sebagai alat utama untuk mengukur indeks bias larutan secara langsung, larutan sukrosa dengan konsentrasi larutan berlainan (5 g, 10 g, dan 15 g) dalam 100 mL aquades sebagai medium optik, pipet tetes dan gelas beaker untuk menyiapkan dan meneteskan larutan ke prisma refraktometer, serta termometer untuk memastikan suhu larutan tetap pada kisaran ±27 °C karena indeks bias sangat bergantung pada suhu. Selain itu, digunakan sumber cahaya monokromatik

berupa lampu LED atau natrium agar panjang gelombang tetap konstan selama percobaan berlangsung.

Objek dalam penelitian ini adalah larutan sukrosa dengan konsentrasi berbeda yang berfungsi sebagai medium optik. Sementara itu, subjek penelitian mencakup data sudut datang, sudut bias, serta nilai indeks bias yang diperoleh dari pengukuran eksperimental dan perhitungan teoretis.

Dalam penelitian ini, variabel independen yang digunakan adalah konsentrasi larutan sukrosa (%) dan sudut datang cahaya (θ_1), sedangkan variabel dependen dalam penelitian ini adalah indeks bias larutan (n) dan sudut bias yang diamati (θ_2). Beberapa variabel kontrol juga ditetapkan untuk menjaga konsistensi hasil, seperti suhu larutan, panjang gelombang cahaya, dan jenis larutan yang digunakan. Teknik pengumpulan data melibatkan pengamatan langsung menggunakan refraktometer Abbe, serta pencatatan nilai sudut datang dan bias dalam kondisi eksperimental terkendali. Pengambilan data dilakukan secara berulang bertujuan untuk mengambil rata-ratanya, sehingga pengukuran dapat lebih objektif dan terhindar dari bias akibat human error (Faradhillah & Hendri, 2019). Prosedur penelitian dimulai dengan tahap persiapan alat dan bahan. Refraktometer dikalibrasi terlebih dahulu menggunakan aquades untuk memastikan keakuratan pengukuran. Larutan sukrosa kemudian disiapkan dalam tiga konsentrasi berbeda (5 g, 10 g, 15 g per 100 mL air), dan suhunya dipastikan stabil pada ±27 °C. Pada tahap pengukuran, larutan diteteskan ke prisma refraktometer dan nilai indeks bias dibaca langsung untuk masing-masing konsentrasi. Selanjutnya, dilakukan pengamatan pembiasan cahaya pada sudut datang 10°, 20°, dan 30° untuk melihat perubahan sudut bias serta mengevaluasi perbedaan antara nilai eksperimen dan nilai hasil aproksimasi teoritis.

Analisis data dilakukan dengan membandingkan hasil pengukuran eksperimen dengan hasil perhitungan menggunakan hukum Snellius. Persamaan dasar yang digunakan adalah:

$$\mathbf{n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2} \quad \textbf{(1)}$$

Aproksimasi fungsi sinus dilakukan menggunakan deret Taylor hingga orde kedua sebagai berikut:

$$\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \cdots$$

- Orde 1 (linear):

$$\mathbf{\sin\theta \approx \theta} \quad \textbf{(2)}$$

- Orde 2 (kuadratik kubik):

$$\mathbf{\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}} \quad \textbf{(3)}$$

Untuk mengetahui kontribusi kesalahan pemotongan (Truncation Error), dengan definisi jika kesalahan pemotongan adalah suku pertama yang diabaikan dari deret Taylor, maka rumus dinyatakan sebagai berikut.

Untuk aproksimasi orde 1:

$$\mathbf{E_{T1} = \left| \frac{\theta^3}{3!} \right| = \left| \frac{\theta^3}{6} \right|} \quad \textbf{(4)}$$

Untuk aproksimasi orde 2:

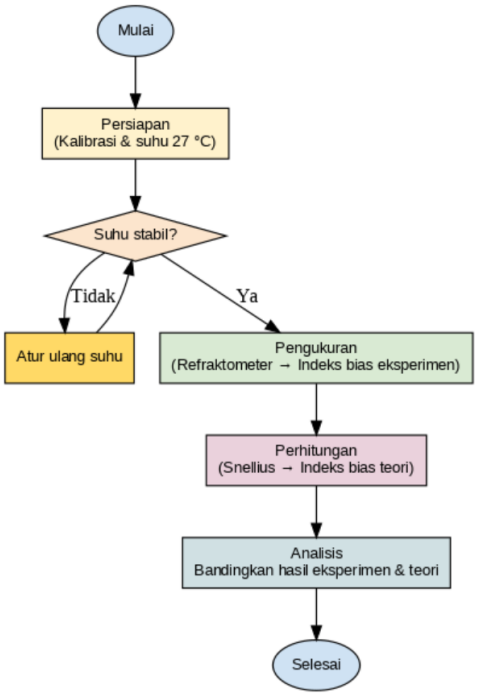
$$\mathbf{E_{T2}} = \left| \frac{\boldsymbol{\theta}^5}{5!} \right| = \left| \frac{\boldsymbol{\theta}^5}{120} \right| \quad \textbf{(5)}$$

Persentase Error

Dapat ditentukan dengan formula:

$$\%\mathbf{E_T} = \frac{\mathbf{E_T}}{\sin \boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{100}\% \quad \textbf{(6)}$$

Hasil dari eksperimen dan perhitungan tersebut kemudian dibandingkan untuk menilai sejauh mana kesalahan aproksimasi berdampak terhadap nilai indeks bias yang diperoleh dari pengamatan langsung.



Gambar 1. *Diagram Alir Skema Kerja Eksperimen*

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Data Eksperimen

Dalam eksperimen, pengukuran indeks bias larutan sukrosa dilakukan dengan menggunakan refraktometer Abbe pada larutan dengan volume 100 mL (10^{-4} m³). Larutan sukrosa disiapkan dengan tiga konsentrasi berbeda, yaitu 5 g, 10 g, dan 15 g sukrosa per 100 mL air. Pengukuran indeks bias dilakukan sebanyak tiga kali untuk masing-masing konsentrasi. Tabel berikut merangkum hasil pengukuran:

Tabel 1. *Data Hasil Percobaan Indeks Bias Larutan Sukrosa*

Volume Air (m³)	Massa sukrosa (kg)	n_1	n_2	n_3	$\bar{n}$
10^{-4}	0,005	1,341	1,346	1,347	1,345

10^{-4}	0,01	1,349	1,347	1,363	1,353
10^{-4}	0,015	1,353	1,389	1,420	1,387

Keterangan: $\bar{n}$ menunjukkan nilai rata-rata indeks bias dari tiga kali pengulangan.

Secara spesifik, tabel mengenai perhitungan nilai indeks bias dan ralat pengamatannya (Standar Deviasi) ada di bawah ini.

Tabel 2. *Percobaan pada larutan sukrosa 5 g/100mL*

Percobaan ke-	n_i	$n_i - \bar{n}$	$(n_i - \bar{n})^2$
1	1,341	-0,0037	$1,36.10^{-5}$
2	1,346	0,0013	$1,69.10^{-6}$
3	1,347	0,0023	$5,29.10^{-6}$
n = 3	$\sum n_i = 4,034$		$\sum(n_i - \bar{n})^2 = 2,1.10^{-5}$

$\bar{n}$=1,345; n=1,345 ± 0,0032

Tabel 3. *Percobaan pada larutan sukrosa 10 g/100mL*

Percobaan ke-	n_i	$n_i - \bar{n}$	$(n_i - \bar{n})^2$
1	1,349	-0,004	$1,6.10^{-5}$
2	1,347	-0,006	$3,6.10^{-5}$
3	1,363	0,010	$1,0.10^{-4}$
n = 3	$\sum n_i = 4,059$		$\sum(n_i - \bar{n})^2 = 15.10^{-5}$

$\bar{n}$=1,353; n=1,353 ± 0,0087

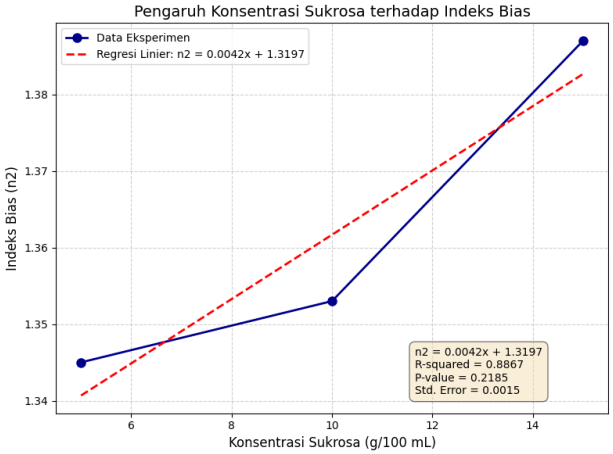
Tabel 4. *Percobaan pada larutan sukrosa 15 g/100mL*

Percobaan ke-	n_i	$n_i - \bar{n}$	$(n_i - \bar{n})^2$
1	1,353	-0,0343	120.10^{-5}
2	1,389	0,0017	$2,89.10^{-6}$
3	1,420	0,0327	1100.10^{-6}
n = 3	$\sum n_i = 4,162$		$\sum(n_i - \bar{n})^2 = 230.10^{-5}$

$\bar{n}$=1,387; n=1,387 ± 0,0332

2. Korelasi Konsentrasi dan Indeks Bias

Dari ke empat tabel sebelumnya, terlihat bahwa peningkatan massa sukrosa dalam larutan menyebabkan peningkatan indeks bias. Hal ini sesuai dengan fenomena optik di mana penambahan zat terlarut meningkatkan kerapatan medium sehingga memperlambat laju cahaya. Secara umum, larutan dengan konsentrasi sukrosa yang lebih tinggi menunjukkan indeks bias yang lebih besar dibandingkan larutan dengan konsentrasi yang lebih rendah.



Gambar 2. *Grafik Analisis Hubungan Antara Konsentrasi Larutan terhadap Indeks Bias*

Berdasarkan grafik pada gambar 2 diperoleh hubungan berbanding lurus antara konsentrasi larutan sukrosa dan indeks bias larutan. Hal ini sejalan dengan literatur yang menyatakan bahwa peningkatan konsentrasi zat terlarut meningkatkan kerapatan medium dan akibatnya, indeks bias pun juga meningkat. Temuan mengindikasikan bahwa pertambahan zat terlarut meningkatkan kerapatan medium sehingga memperlambat laju cahaya, sesuai dengan literatur optik (Belay & Assefa, 2018). Hal tersebut menunjukkan bahwa pada konsentrasi rendah, yakni larutan yang lebih encer, efek deviasi cahaya lebih sensitif terhadap penyimpangan. Sebaliknya, pada konsentrasi tinggi, kepadatan medium mengurangi deviasi relatif sehingga error lebih kecil.

3. Analisis Aproksimasi Indeks Bias dengan Deret Taylor dan *Truncation Error*

Dalam pengukuran indeks bias larutan sukrosa, penggunaan deret Taylor untuk mengaproksimasi fungsi sinus pada hukum Snellius memainkan peran penting dalam menentukan ketelitian perhitungan. Pada sudut kecil, penggunaan deret Taylor orde pertama dan orde kedua telah menunjukkan hasil yang cukup baik. Namun, kesalahan akibat pemotongan deret Taylor, atau yang dikenal dengan istilah kesalahan pemotongan, semakin signifikan saat sudut bias meningkat.

Aproksimasi menggunakan suku pertama dari deret Taylor menyebabkan kesalahan pemotongan. Sebagai contoh, dalam eksperimen yang dilakukan, peningkatan konsentrasi larutan sukrosa dari 10 g/100 mL menjadi 15 g/100 mL menunjukkan bahwa indeks bias mengalami peningkatan dari 1,353 menjadi 1,387. Temuan ini sejalan dengan penelitian oleh Belay dan Assefa, 2018 yang menunjukkan bahwa peningkatan konsentrasi larutan sukrosa menyebabkan peningkatan indeks bias secara signifikan, dengan nilai berkisar dari 1,344 hingga 1,411 tergantung pada konsentrasi dan panjang gelombang yang digunakan. Namun, pada kondisi ini, sudut bias yang lebih besar menyebabkan *truncation error* dari aproksimasi orde pertama menjadi lebih signifikan, seiring dengan meningkatnya sudut bias dan konsentrasi larutan. Hal ini menunjukkan bahwa pada konsentrasi yang lebih tinggi, kesalahan pemotongan menjadi lebih terasa, sebagaimana yang ditemukan dalam studi eksperimental dengan metode refraktometri berbasis prisma (Pattarapon et al., 2021), yang menunjukkan gradasi indeks bias akibat variasi kerapatan larutan sukrosa.

Beberapa kajian numerik menyatakan bahwa penggunaan aproksimasi deret Taylor orde pertama dalam pengukuran refraktometri dapat menghasilkan kesalahan yang lebih besar, terutama pada sudut bias yang besar. Perbedaan antara perhitungan teoretis menggunakan deret Taylor dan nilai eksperimen menjadi lebih nyata pada sudut yang lebih besar, karena pengabaian suku-suku tambahan dalam deret Taylor. Dalam konteks pengukuran indeks bias, perbedaan ini mengindikasikan ketidakakuratan yang ditimbulkan oleh *truncation error* pada pendekatan orde pertama, sebagaimana dijelaskan secara umum dalam banyak literatur numerik.

Untuk mengurangi kesalahan ini, penggunaan deret Taylor orde kedua, yang mengakomodasi suku kedua atau orde kedua dari deret, menjadi sangat penting. Dalam penelitian ini, penerapan deret Taylor orde kedua terbukti mengurangi *truncation error* secara signifikan dan menghasilkan nilai indeks bias yang lebih mendekati nilai eksperimen, terutama pada sudut yang lebih besar. Prinsip ini diperkuat dengan saran dari kajian numerik dalam aplikasi rekayasa optik, yang merekomendasikan pemakaian orde lebih tinggi untuk ketelitian maksimal dalam sudut bias menengah hingga besar.

Meskipun pendekatan orde pertama cukup akurat untuk sudut kecil, pada konsentrasi yang lebih tinggi dan sudut bias yang lebih besar, perbedaan antara perhitungan teoretis dan nilai eksperimen mulai menjadi signifikan. Oleh karena itu, untuk mencapai presisi yang lebih tinggi dalam aplikasi optik yang memerlukan ketelitian lebih, penting untuk mempertimbangkan suku tambahan dalam deret Taylor, seperti pada orde kedua atau lebih tinggi.

Penelitian ini menguatkan argumen bahwa kesalahan pemotongan tidak bisa dianggap sepele dalam pengukuran refraktometri larutan sukrosa. Penggunaan deret Taylor hanya dengan suku pertama mungkin sudah cukup untuk aplikasi sederhana atau pada sudut kecil. Namun, untuk aplikasi yang membutuhkan presisi tinggi, terutama dalam pengukuran optik pada sudut besar, perlu dipertimbangkan penggunaan lebih banyak suku dalam deret Taylor atau bahkan metode alternatif yang lebih cermat, seperti pendekatan numerik eksak atau metode simulasi berbasis grafik sinar (*ray tracing*), sebagaimana disarankan dalam studi-studi teknik optik presisi tinggi.

4. Perhitungan Teoritis

4.1 Menentukan Indeks Bias Rata-rata

Berdasarkan hasil eksperimen, indeks bias rata-rata ($\bar{n}$) untuk masing-masing konsentrasi larutan sukrosa adalah:

- 5 g/100 mL (5%): 1,345
- 10 g/100 mL (10%): 1,353
- 15 g/100 mL (15%): 1,387

Kita akan menggunakan hukum Snellius:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

dan mendekati fungsi sinus dengan deret Taylor.

4.2 Aproksimasi Sinusoidal dengan Deret Taylor

Fungsi sinus dapat dinyatakan dalam bentuk deret Taylor:

$$\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots,$$

Untuk pendekatan pertama, kita hanya mengambil suku pertama, yakni:

$$\sin\theta \approx \theta$$

Untuk pendekatan lebih akurat, kita menggunakan dua suku pertama, yakni:

$$\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

4.3 Menentukan Truncation Error dan Persentase Error

Truncation error terjadi karena pemotongan deret Taylor hanya pada suku tertentu. Untuk aproksimasi orde pertama $\sin\theta \approx \theta$, error aproksimasi didefinisikan sebagai:

$$E_T = \left| \frac{\theta^3}{6} \right|$$

Aproksimasi orde kedua:

$$E_T = \left| \frac{\theta^5}{120} \right|$$

Untuk menghitung error ini, kita memerlukan data sudut datang θ_1 dan sudut bias θ_2 dalam radian.

Secara teori remainder (Lagrange form): ada ξ antara 0 dan θ, sehingga

$$R_n(\theta) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\theta^{n+1}$$

Karena turunan sinus bernilai ≤ 1, maka batasannya ialah:

$$|R_n(\theta)| \leq \frac{|\theta|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Maka rumus untuk perhitungan truncation error adalah valid.

Untuk perhitungan %Error:

$$\%E_T = \frac{E_T}{\sin\theta} \times 100\%$$

4.4 Perhitungan untuk Larutan 5 g/100 mL

4.4.1 Perhitungan untuk Sudut Datang 10°

4.4.1.1 Perhitungan Sudut Bias Eksak dengan Hukum Snellius

Sudut datang θ_1= 10° (0,1745 rad), indeks bias air adalah n_1 = 1,333 dan indeks bias larutan rata-rata, n_2 = 1,345.

Dari hukum Snellius:

$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$

$(1{,}333)\ (\sin 10°) = 1{,}345(\sin\theta_2)$

Karena $\sin 10° = 0{,}1736$, maka:

$(1{,}333)\ (0{,}1736) = 1{,}345(\sin\theta_2)$

$0{,}2314 = 1{,}345(\sin\theta_2)$

$(\sin\theta_2) = 0{,}2314/1{,}345 = 0{,}1721$

$\theta_2 = \sin^{-1}(0{,}1721)$

$\theta_2 = 9{,}910°$

Sudut bias eksak adalah 9,910°.

4.4.1.2 Perhitungan Sudut Bias dengan Aproksimasi Deret Taylor

Aproksimasi dengan Deret Taylor (Orde 1 dan Orde 2)

Pendekatan pertama (orde 1):

$\sin \theta_2 \approx \theta 2$

$\theta_2 \approx 0{,}1721$ rad

$\theta_2 \approx 9{,}861°$

Pendekatan kedua (orde 2):

$\sin \theta_2 \approx \theta_2 - \theta_2^3/6$

$0{,}1721 \approx \theta_2 - (0{,}1721)^3/6$

$0{,}1721 \approx \theta_2 - 0{,}0051/6$

$0{,}1721 \approx \theta_2 - 0{,}0008$

$\theta_2 \approx 0{,}1729$ rad

$\theta_2 \approx 9{,}906°$

4.4.1.3 Perhitungan Truncation Error dan Persentase Error

Truncation error pada aproksimasi orde pertama:

$$E_{T1} = \left| \frac{\theta^3}{6} \right|$$

$= |(0{,}1721)^3/6|$

$= 8{,}62\text{E-}04$ rad

%Error:

$$\%E_{T1} = \frac{E_{T1}}{\sin \theta} \times 100\%$$

$= 0{,}50\ \%$

Truncation error pada aproksimasi orde kedua:

$$E_{T2} = \left| \frac{\theta^5}{120} \right|$$

$= 1{,}29\text{E-}06$ rad

%Error:

$$\%E_{T2} = \frac{E_{T2}}{\sin \theta} \times 100\%$$

$= 0{,}0007\ \%$

Ketika dilakukan perhitungan seperti di atas, hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut.

Tabel 4. *Hasil Perhitungan Sudut Bias Eksak dengan Hukum Snellius*

Konsentrasi (g/100 mL)	n_2	$\theta_1(°)$	$\theta_{2\ EKSAK}(°)$
5	1,345	10	9,91
	1,345	20	19,81
	1,345	30	29,71
10	1,353	10	9,851
	1,353	20	19,69

	1,353	30	29,51
15	1,387	10	9,607
	1,387	20	19,19
	1,387	30	28,72

Tabel 5. *Hasil Perhitungan Sudut Bias pada Berbagai Konsentrasi dengan Pendekatan Pertama (Orde 1)*

Konsentrasi (g/100 mL)	n_2	θ_1(°)	θ_2 (°)
5	1,345	10	9,861
	1,345	20	19,42
	1,345	30	28,39
10	1,353	10	9,802
	1,353	20	19,31
	1,353	30	29,22
15	1,387	10	9,562
	1,387	20	18,83
	1,387	30	27,53

Tabel 6. *Hasil Perhitungan Sudut Bias pada Berbagai Konsentrasi dengan Pendekatan Kedua (Orde 2)*

Konsentrasi (g/100 mL)	n_2	θ_1(°)	θ_2 (°)
5	1,345	10	9,906
	1,345	20	19,82
	1,345	30	29,73
10	1,353	10	9,851
	1,353	20	19,69
	1,353	30	29,53
15	1,387	10	9,606
	1,387	20	19,19
	1,387	30	28,74

Tabel 7. *Hasil Perhitungan Kesalahan Pemotongan (Truncation Error) dalam Aproksimasi Orde 1 dan Persentase Error*

Konsentrasi (g/100 mL)	n_2	θ_1(°)	E_{T1} (rad)	% error
5	1,345	10	8,624E-04	0,50

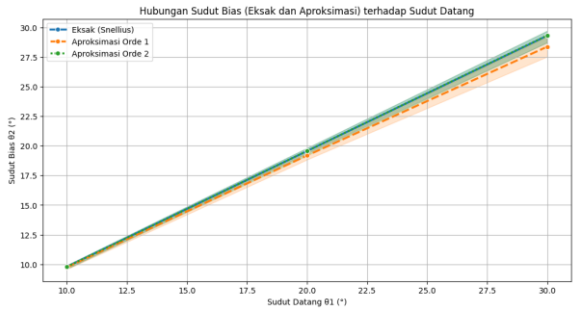
	1,345	20	6,893E-03	2,03
	1,345	30	2,323E-02	4,68
10	1,353	10	8,470E-04	0,49
	1,353	20	6,766E-03	2,00
	1,353	30	2,278E-02	4,62
15	1,387	10	7,857E-04	0,47
	1,387	20	6,262E-03	1,90
	1,387	30	2,099E-02	4,36

Dalam aproksimasi orde 2 nilai kesalahan pemotongan dan persentase errornya akan memiliki pola yang sama dengan pendekatan di orde 1.

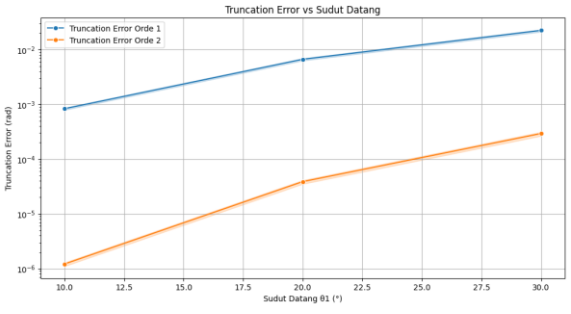
Disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 8. *Hasil Perhitungan Kesalahan Pemotongan (Truncation Error) dalam Aproksimasi Orde 2 dan Persentase Error*

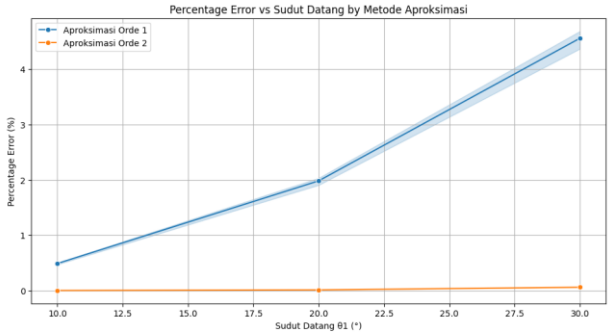
Konsentrasi (g/100 mL)	n_2	$\theta_1(°)$	E_{T2} (rad)	% error
5	1,345	10	1,290E-06	0,0007
	1,345	20	4,122E-05	0,0121
	1,345	30	3,122E-04	0,0629
10	1,353	10	1,252E-06	0,0007
	1,353	20	3,996E-05	0,0118
	1,353	30	3,021E-04	0,0613
15	1,387	10	1,104E-06	0,0006
	1,387	20	3,512E-04	0,0106
	1,387	30	2,637E-04	0,0548



(a)



(b)



(c)

Gambar 3. *(a,b,c) menunjukkan hubungan antara variabel di sb-xdan sb-y. (a) menunjukkan hubungan sudut bias eksak dan sudut bias aproksimasi terhadap sudut datang. Sudut bias eksak diperoleh secara teoritis dengan hukum Snellius, sudut bias aproksimasi diperoleh dari aproksimasi sinusoidal orde 1,2. Terlihat bahwa kedua aproksimasi semakin menyimpang dari nilai eksak seiring dengan peningkatan sudut datang. Aproksimasi orde kedua menunjukkan kesesuaian yang lebih baik dengan nilai eksak dibandingkan aproksimasi orde pertama, terutama pada sudut datang yang lebih besar. (b) menunjukkan hubungan truncation error (dalam radian, skala logaritmik) dan sudut datang. Analisis menyatakan besarnya error dipengaruhi oleh besar/kecil sudut datang. Aproksimasi orde kedua menunjukkan error yang secara signifikan lebih kecil dibandingkan aproksimasi orde pertama. (c) menunjukkan hubungan persentase error aproksimasi orde 1,2 terhadap sudut datang. Terdapat korelasi positif yang jelas antara persentase error dan sudut datang untuk kedua metode aproksimasi. Error persentase meningkat signifikan seiring dengan bertambahnya sudut datang. Namun, aproksimasi orde kedua secara konsisten menghasilkan persentase error yang jauh lebih rendah disbanding pada aproksimasi orde pertama di seluruh rentang sudut datang yang diamati, menunjukkan jika aproksimasi orde kedua lebih teliti.*

SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan analisis hasil perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh beberapa kesimpulan. Pertama, indeks bias larutan meningkat seiring bertambahnya konsentrasi zat terlarut. Hal ini bisa dibuktikan dari hasil data percobaan. Indeks bias meningkat dari 1,345 pada konsentrasi 5 g/100 mL menjadi 1,353 pada konsentrasi 10 g/100 mL kemudian meningkat lagi menjadi 1,387 pada konsentrasi 15 g/100 mL. Kedua, pendekatan deret Taylor orde pertama dan orde kedua menunjukkan hasil perhitungan yang berbeda, di mana kesalahan pemotongan pada orde pertama relatif signifikan, sedangkan orde kedua jauh lebih kecil. Ketiga, semakin besar indeks bias, semakin besar pula perbedaan sudut bias yang dihasilkan, dan semakin besar kesalahan pemotongan yang muncul dalam pendekatan orde pertama. Misalnya, pada 5 g/100 mL, truncation error naik dari 0,000862 rad (10°) menjadi 0,02322 rad (30°). Pada 10 g/100 mL, truncation error naik dari 0,000847 rad (10°) menjadi 0,02278 rad (30°). Pada 15 g/100 mL, truncation error naik dari 0,0007857 rad (10°) menjadi 0,02099 rad (30°). Terakhir, kesalahan pemotongan dan persentase error kian menurun seiring bertambahnya nilai konsentrasi larutan sukrosa. Pada sudut 10°, truncation error berkurang dari 0,000862 rad (5 g/100 mL, 0,50%) menjadi 0,0007857 rad (15 g/100 mL, 0,47%). Pada sudut 20°, truncation error turun dari 0,006893 rad (5 g/100 mL, 2,03%) menjadi 0,006262 rad (15 g/100 mL, 1,90%). Pada sudut 30°, truncation error berkurang dari 0,02322 rad (5 g/100 mL, 4,68%) menjadi 0,02099 rad (15 g/100 mL, 4,36%). Demikian pula, persentase error pada sudut 10° menurun dari

0,50% (5 g/100 mL) menjadi 0,47% (15 g/100 mL), pada sudut 20° menurun dari 2,03% (5 g/100 mL) menjadi 1,90% (15 g/100 mL), dan pada sudut 30° menurun dari 4,68% (5 g/100 mL) menjadi 4,36% (15 g/100 mL). Kesalahan pemotongan dalam aproksimasi indeks bias menggunakan deret Taylor semakin kecil saat konsentrasi larutan meningkat, tetapi tetap meningkat seiring bertambahnya sudut bias. Hal ini menunjukkan bahwa penggunaan pendekatan orde pertama lebih akurat untuk larutan dengan konsentrasi lebih tinggi atau sudut bias yang kecil, sedangkan pendekatan orde kedua lebih stabil untuk semua kondisi.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis ingin mengucapkan banyak terima kasih kepada koordinator laboratorium Universitas Diponegoro, kakak-kakak asisten laboratorium Fisika B yang telah menjelaskan dengan saksama tiap skema kerja praktikum. Terima kasih juga untuk para peneliti yang sudah banyak menerbitkan karya hebatnya, sehingga penulis dapat dengan lebih mudah menyusun kata demi kata, kalimat demi kalimat, bahkan paragraf demi paragraf sehingga artikel dapat tersusun dengan struktur yang komplit. Terima kasih juga untuk rekan saya, Steven dan Bapak Fajar, selaku dosen pembimbing. Teruntuk penyedia jurnal, terima kasih penulis ucapkan sebab sudah mewadahi penulis untuk bisa mempublish artikelnya.

DAFTAR PUSTAKA

A, B., & G, A. (2018). Concentration, wavelength, and temperature dependent refractive index of sugar solutions and methods of determination contents of sugar in soft drink beverages using laser lights. *Journal of Lasers, Optics & Photonics*, *05*(02). https://doi.org/10.4172/2469-410x.1000187

Devi Susilayani, N. I. S. M. (2017). Pengembangan alat ukur indeks bias menggunakan prisma berongga dari lembaran kaca komersial biasa dan laser he-ne untuk pengujian kualitas minyak goreng. *Risalah Fisika*, *1*(2), 39–46. https://doi.org/10.35895/rf.v1i2.45

Didik, L. A., Safarwadi, I., & Muslimah, M. (2021). Pengukuran indeks bias larutan untuk mengetahui kadar gula dalam tebu dengan menggunakan metode difraksi fraunhofer celah tunggal. *KONSTAN - JURNAL FISIKA DAN PENDIDIKAN FISIKA*, *6*(1), 35–42. https://doi.org/10.20414/konstan.v6i1.68

Elsayad, K. (2019). A new angle on mapping the refractive index. *Physics*, *12*. https://doi.org/10.1103/physics.12.27

Faradhillah, F., & Hendri, S. (2019). Mengukur indeks bias berbagai jenis kaca dengan menggunakan prinsip pembiasan. *IJIS Edu : Indonesian Journal of Integrated Science Education*, *1*(2). https://doi.org/10.29300/ijisedu.v1i2.1959

Kurniawati, D., & Suryani, A. (2023). Penentuan indeks bias kaca dengan pola interferensi pola terhambur dan prinsip pembiasan. *JURNAL SAINS DAN PEMBELAJARAN MATEMATIKA*, *1*(2), 30–36. https://doi.org/10.51806/jspm.v1i1.54

Murniati, M. E., & Sudarti. (2023). Pemanfaatan alat bantu refraktometer untuk menguji kualitas minyak goreng. *Jurnal Ikatan Alumni Fisika Universitas Negeri Medan*, *9*(1).

Nahmad-Rohen, A., & García-Valenzuela, A. (2023). *Multiple-scattering model for the effective refractive index of dense suspensions of forward-scattering particles*. https://doi.org/10.1364/JOSAA.489903

Paul, U., & Bandyopadhyay, A. (2019). Theoretical approaches to qualitative research.

Bengal Physician Journal, *6*(1), 12–14. https://doi.org/10.5005/jp-journals-10100-6103

Puspitsari Koriston, M., Jarnawi, M., Alit Adi Untra, K., Santoso, R., & Kunci, K. (2025). *The Development of Physics Teaching Modules Based on Monyilo Tradition To Support the Implementation of Independent Curriculum* (Vol. 13, Nomor 1). https://jurnalfkipuntad.com/index.php/jpft

Rahma, T., Dan, N., & Hidayanto, E. (2015). In *Youngster Physics Journal* (Vol. 4, Issue 2).

Sari, A. M., Dewi, U. M., & Setiawan, T. (2023). *JURNAL INOVASI PENDIDIKAN DAN SAINS*, *4*(2), 108–112. https://doi.org/10.51673/jips.v4i2.1618

Sasaki, S. (2022). in optics, volume 8. https://doi.org/10.1016/j.rio.2022.100260

Saunders, J. E., Sanders, C., Chen, H., & Loock, H.-P. (2016). Refractive indices of common solvents and solutions at 1550 nm. *Applied Optics*, 55(4), 947–953. https://doi.org/10.1364/AO.55.000947

Tanalikhit, P., Worakitthamrong, T., Chaidet, N., & Kanchanapusakit, W. (2022). Measuring the refractive index gradient of a sugar solution. *Journal of Physics: Conference Series*, *2145*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/2145/1/012072

Vestermark, H. (2025). *Exploring Taylor series approximation of certain functions*. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.34201.74087

Yunitri, N., Janitra, F. E., Kustanti, C. Y., Nur Aini, Tiara Octary, Melati Fajarini, … Yani Sofiani. (2024). *Jurnal Kesehatan*, *11*(2), 67–79. https://doi.org/10.35913/jk.v11i2.453

Zentile, M. A., Offermans, P., Young, D., & Zhang, X. U. (2024). Fibre for within *Sensors*, *24*(19). https://doi.org/10.3390/s24196336

Zhao, N., Wang, Z., Zhang, Z., Lin, Q., Yao, K., Zhu, L., Tian, B., Zhao, L., Yang, P., & Jiang, Z. (2022). Simultaneous measurement of temperature and refractive index using Michelson interferometer based on waist-enlarged fiber bitaper. *Micromachines*, *13*(5). https://doi.org/10.3390/mi13050658

Zhong, T., Guo, G., Chow, Y., Yang, Y., Zhang, T., Yang, J., Lu, M., Wang, Y., Zhu, Y., Jia, T., Shi, Y., & Ke, C. (2025). Measurement method of refractive index for optical lenses based on curvature radius fitting of small-sized aspheric surfaces. *Optics*, *6*(1). https://doi.org/10.3390/opt6010004